

問1	⁽¹⁾ -2	⁽²⁾ $t = -\frac{1}{2}$	⁽²⁾ 最小値 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
問2	⁽¹⁾ 24 個	⁽²⁾ 6 個	⁽³⁾ 98 個
問3	⁽¹⁾ $f(x) = -x^2 + 2x + 3$	⁽²⁾ ⁽⁷⁾ $y = -2x + 7$	⁽²⁾ ⁽⁴⁾ $\frac{7}{12}$

問1

$$(1) t = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より, } -\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

よって, $-1 \leq t \leq 2$

$$(2) t^2 = 3\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$$

$$\text{よって, } y = 1 - t^2 + 2at + 4b - 9 = -t^2 + 2at + 4b - 8$$

問2

$$(1) y = -t^2 + 2at + 4b - 8 = -(t-a)^2 + a^2 + 4b - 8$$

t^2 の係数が負で, $a \geq 2$ より, $-1 \leq t \leq 2$ において, $t=2$ のとき y は最大。

よって, $-2^2 + 4a + 4b - 8 < 0$ であればよい。

したがって求める関係式は, $a + b < 3$

$$(2)(i) 0 < a < 2 \text{ のとき, } t = a \text{ のとき } y \text{ は最大。}$$

よって, $a^2 + 4b - 8 < 0$ であればよい。

ここで, a は自然数なので, $a = 1$

$$\text{よって, } 1 + 4b - 8 < 0 \quad \therefore b < \frac{7}{4}$$

b も自然数なので, $b = 1$

$$(ii) a \geq 2 \text{ のとき, (1) から } a + b < 3$$

ここで, $a \geq 2$ かつ $b \geq 1$ より, $a + b \geq 3$ となり不適。

$$(i), (ii) \text{ より, } a = b = 1$$

$$\therefore y = -t^2 + 2t - 4 = -(t-1)^2 - 3$$

t^2 の係数が負より, $-1 \leq t \leq 2$ において, $t=1$ のとき最大値 -3 をとる。

このとき,

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi \text{ より, } \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{よって, } \theta = \frac{\pi}{3}, \pi$$

問1

$P(0, -1)$ が中心で, 点 $Q(0, 1)$ を通るから, 半径は, $1 - (-1) = 2$

よって, $x^2 + (y+1)^2 = 4$

問2

点 R を通り, y 軸に平行な直線と直線 $y = -1$ との交点を H とする。

$\triangle PHR$ は, $\angle PHR = 90^\circ$, $\angle RPH = 30^\circ$ の直角三角形で,

$PR = 2$ より $HR = 1$, $HP = \sqrt{3}$

よって, $R(-\sqrt{3}, -2)$

<別解>

半径 2 で, $\angle QPR = 120^\circ$ より

$R(2\cos 210^\circ, 2\sin 210^\circ - 1)$

よって, $R(-\sqrt{3}, -2)$

問3

$T(-\sqrt{3}, 0)$ とする。

直線 ℓ が円 C と接するとき, $\frac{\left|0 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 + a\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2}} = 2$

$$\therefore a = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$$

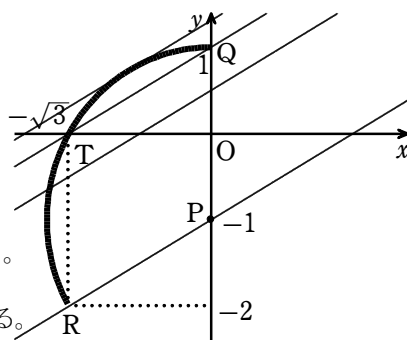
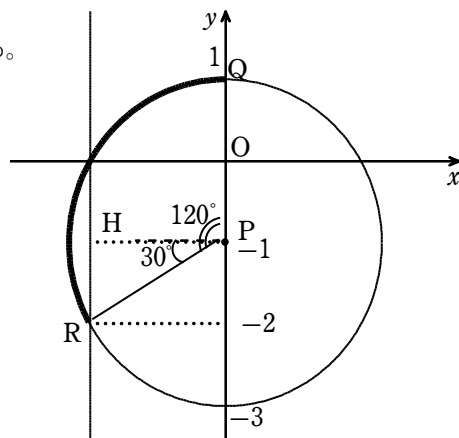
弧 L の位置から, $a = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1$

直線 QT と直線 PR の傾きは $\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり, 直線 ℓ の傾きと一致する。

よって, 直線 ℓ が T を通るときは Q も通り, R を通るときは P も通る。

T を通るとき $a = 1$, R を通るとき $a = -1$

よって共有点の個数は, $\begin{cases} a < -1 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ -1 \leq a < 1 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 1 \leq a < \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \\ a = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ a > \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1 \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \end{cases}$



問4

弧 L と直線 ℓ が異なる 2 つの共有点を持つときに S が最大となるのは, $a = 1$ のとき。

よって, 弧 L と線分 QT で囲まれる図形の面積となる。

$QT = PT = PQ = 2$ より, $\triangle QPT$ は正三角形となるから, $\angle QPT = 60^\circ$ である。

よって, 求める最大値は,

$$(\text{扇型QPT}) - \triangle QPT = \pi \times 2^2 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ = \frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}$$

問1

p_1 は、さいころを 1 回投げて 1 の目が出る確率だから、 $p_1 = \frac{1}{6}$

p_2 は、2 回投げたうち、1 回が 1 以外の目で、もう 1 回が 1 の目が出る確率だから、 $p_2 = {}_2C_1 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{18}$

問2

p_{n+1} は、 n 回投げたとき、

1 の目が出る回数が偶数のときは、 $(n+1)$ 回目は 1 以外の目が出るから $\frac{1}{6}(1-p_n)$

1 の目が出る回数が奇数のときは、 $(n+1)$ 回目は 1 の目が出るから $\frac{5}{6}p_n$

互いに排反なので、 $p_{n+1} = \frac{1}{6}(1-p_n) + \frac{5}{6}p_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$

問3

問2より、 $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

よって、数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから、

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

よって、 $p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

問4

さいころを n 回投げて 1 の目が偶数回出る確率は、 $1 - p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{5}{8} \text{ のとき, } \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{4}$$

$$\therefore 2^{n+2} < 3^n$$

$$n=1 \text{ のとき, } 2^3=8, 3^1=3$$

$$n=2 \text{ のとき, } 2^4=16, 3^2=9$$

$$n=3 \text{ のとき, } 2^5=32, 3^3=27$$

$$n=4 \text{ のとき, } 2^6=64, 3^4=81$$

よって、投げる回数の最小値は 4

問1

$$x = \sqrt{2} \sin \theta \text{ とおくと, } dx = \sqrt{2} \cos \theta d\theta$$

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2 \theta} \cos \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

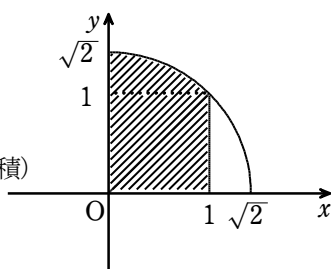
$$= 2 \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

<別解>

求める定積分は、右図の斜線部分の面積に一致する。

つまり、(半径 $\sqrt{2}$, 中心角 $\frac{\pi}{4}$ の扇形の面積)+(底辺と高さが1の直角三角形の面積)

$$\text{よって, } \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = (\sqrt{2})^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$



問2

(1) $f'(x) = -abe^{-bx}$ より,

点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は, $y - ae^{-bt} = -abe^{-bt}(x - t)$

よって, $y = -abe^{-bt}x + ae^{-bt}(bt + 1)$

(2) 曲線 $y = f(x)$ が点 $(1, 1)$ を通るので, $ae^{-b} = 1$

よって (1) の結果から, 点 $(1, 1)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式は,

$$y = -bx + b + 1 \cdots \textcircled{1}$$

点 $(1, 1)$ における円 C の接線の方程式は, $1 \cdot x + 1 \cdot y = 2 \quad \therefore y = -x + 2 \cdots \textcircled{2}$

①, ② は一致するので, $b = 1$

よって, $a = e, b = 1$

(3) (2) の結果から, $f(x) = e \cdot e^{-x} = e^{-x+1}$

また, $y \geq 0$ のとき円 C の方程式は, $y = \sqrt{2-x^2}$

曲線 $y = f(x)$, 円 C および y 軸で囲まれる部分は、右図の斜線部分。

$0 \leq x \leq 1$ のとき, $e^{-x+1} \geq \sqrt{2-x^2}$ より.

求める面積は, $\int_0^1 (e^{-x+1} - \sqrt{2-x^2}) dx$

$$\text{ここで, } \int_0^1 e^{-x+1} dx = e \left[-e^{-x} \right]_0^1 = e - 1$$

$$\text{また, 問1より, } \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{よって求める面積は, } (e-1) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = e - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$$

