

問1

- (1) $(7-1)! = 720$ (通り)
- (2) A, B 2人を1人と考え, 6人の座り方は, $(6-1)! = 120$ (通り)
 2人の座り方は, $2! = 2$ (通り)
 よって, $120 \times 2 = 240$ (通り)
- (3) 残り4人の座り方は, $(4-1)! = 6$ (通り)
 この4人の間4か所に, A, B, C 3人が1人ずつ座ればよい。
 3人が座る場所の決め方は, ${}_4C_3 = 4$ (通り)
 3人の座り方は, $3! = 6$ (通り)
 よって, $6 \times 4 \times 6 = 144$ (通り)

問2

(1) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) = 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)$

(2) (イ) $\sin x + \cos y = \frac{1}{2}$ より, $\cos y = \frac{1}{2} - \sin x$

$$\cos x - \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より, } \sin y = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1 \text{ より, } \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \sin x \right)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 1$$

$$\therefore \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$$

$$\text{よって, } A = \sqrt{3}, B = 1$$

(イ) (1) と (イ) より, $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \therefore \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ より, } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{よって, } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos y = \frac{1}{2} - \sin x, \sin y = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より,}$$

$$\cos y = -\frac{1}{2}, \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq y \leq 2\pi \text{ より, } y = \frac{4\pi}{3}$$

問3

(1) 変数 x の平均は, $\frac{3+9+1+7+5}{5}=5$

よって変数 x の分散は, $\frac{(3-5)^2+(9-5)^2+(1-5)^2+(7-5)^2+(5-5)^2}{5}=8$

(2) $y=2x+1$ より, 2つの変数 x, y のデータは, 次の通り。

x	3	9	1	7	5
y	7	19	3	15	11

よって変数 y の平均は, $\frac{7+19+3+15+11}{5}=11$

分散は, $\frac{(7-11)^2+(19-11)^2+(3-11)^2+(15-11)^2+(11-11)^2}{5}=32$

変数 x と変数 y の共分散は,

$$\frac{(3-5)(7-11)+(9-5)(19-11)+(1-5)(3-11)+(7-5)(15-11)+(5-5)(11-11)}{5}=16$$

よって相関係数は, $\frac{16}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}=1$

<別解>

変数 x の平均を $\bar{x}$, 変数 y の平均を $\bar{y}$ とすると, $\bar{y}=2\bar{x}+1$

$\bar{x}=5$ より, $\bar{y}=2 \cdot 5+1=11$

変数 x の分散を V_x , 変数 y の分散を V_y とすると, $V_y=2^2 \cdot V_x$

(1)から, $V_x=8$ より, $V_y=4 \cdot 8=32$

$y=2x+1$ より, 変数 x と変数 y の共分散は,

$$\frac{2 \cdot \{(3-5)^2+(9-5)^2+(1-5)^2+(7-5)^2+(5-5)^2\}}{5}=16$$

よって相関係数は, $\frac{16}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}=1$

問1	(1)	720 (通り)	(2)	240 (通り)	(3)	144 (通り)
	(1)	$2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$				
問2	(2)	$A = \sqrt{3} , B = 1$	(2)	$x = \frac{\pi}{2} , y = \frac{4\pi}{3}$		
	(7)		(4)			
問3	(1)	8	(2)	1		

問1

$$y' = 2x + a \text{ より,}$$

$$\text{求める接線の方程式は, } y - (t^2 + at) = (2t + a)(x - t)$$

$$\text{よって, } y = (2t + a)x - t^2$$

問2

問1 で求めた接線 $y = (2t + a)x - t^2$ が, 放物線 C_2 に接する場合を考える。

$$\frac{1}{4}x^2 = (2t + a)x - t^2 \text{ とすると, } x^2 - 4(2t + a)x + 4t^2 = 0$$

$$\text{判別式を } D \text{ とすると, } \frac{1}{4}D = 4(2t + a)^2 - 4t^2 = 0$$

$$(t + a)(3t + a) = 0 \quad \therefore t = -a, -\frac{1}{3}a$$

$$\text{よって求める直線の方程式は, } y = -ax - a^2, y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2$$

<別解>

$$y' = \frac{1}{2}x \text{ より,}$$

$$\text{放物線 } C_2 \text{ 上の点 } \left(s, \frac{1}{4}s^2\right) \text{ における接線の方程式は, } y - \frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{2}s(x - s)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}sx - \frac{1}{4}s^2$$

これが問1 で求めた接線と一致するとき,

$$\begin{cases} 2t + a = \frac{1}{2}s \\ -t^2 = -\frac{1}{4}s^2 \end{cases}$$

連立して s を消去すると, $3t^2 + 4at + a^2 = 0$

$$(3t + a)(t + a) = 0 \quad \therefore t = -a, -\frac{a}{3}$$

$$\text{よって求める直線の方程式は, } y = -ax - a^2, y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2$$

問3

問2で求めた2つの直線のうち、傾きが正であるものが ℓ である。

$$a > 0 \text{ より, } \ell \text{ は } y = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2$$

$$\text{問2より, } \ell \text{ と } C_1 \text{ との接点の } x \text{ 座標は, } x = -\frac{1}{3}a$$

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2 \text{ とすると, } \left(x - \frac{2}{3}a\right)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{3}a$$

$$\text{よって, } \ell \text{ と } C_2 \text{ との接点の } x \text{ 座標は, } x = \frac{2}{3}a$$

C_1 , C_2 および直線 ℓ で囲まれた部分は、右図の斜線部分。

$$-\frac{1}{3}a \leq x \leq 0 \text{ のとき, } x^2 + ax \geq \frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2$$

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}a \text{ のとき, } \frac{1}{4}x^2 \geq \frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2 \text{ より.}$$

面積は,

$$\int_{-\frac{1}{3}a}^0 \left\{ x^2 + ax - \left(\frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2 \right) \right\} dx + \int_0^{\frac{2}{3}a} \left\{ \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{1}{3}ax - \frac{1}{9}a^2 \right) \right\} dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}a}^0 \left(x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{1}{9}a^2 \right) dx + \int_0^{\frac{2}{3}a} \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{4}{3}ax + \frac{4}{9}a^2 \right) dx$$

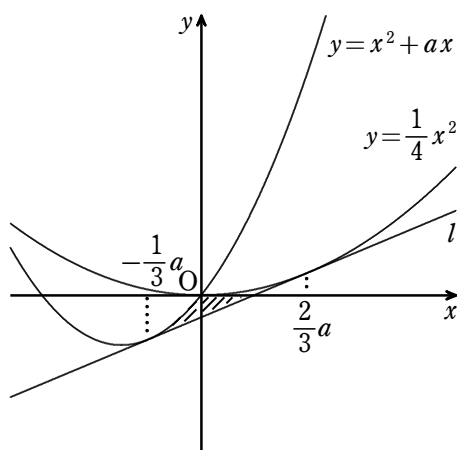
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}ax^2 + \frac{1}{9}a^2x \right]_{-\frac{1}{3}a}^0 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}ax^2 + \frac{4}{9}a^2x \right]_0^{\frac{2}{3}a}$$

$$= \frac{1}{81}a^3 - \frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{27}a^3 + \frac{2}{81}a^3 - \frac{2}{27}a^3 + \frac{2}{27}a^3$$

$$= \frac{3}{81}a^3 = \frac{a^3}{27} = \left(\frac{a}{3} \right)^3$$

$$\text{面積は1より, } \left(\frac{a}{3} \right)^3 = 1 \quad \therefore \frac{1}{3}a = 1$$

よって, $a = 3$ ($a > 0$ を満たす)



問1

表が出ることを1, 裏が出ることを0とする。

$X=4$ となるのは, (1回目, 2回目, 3回目, 4回目) = (1, 1, 1, 1) の1通り。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

問2

$X_4=2$ となるのは,

(1回目, 2回目, 3回目, 4回目) = (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1) の2通り。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

問3

$X=2$ となるのは, 2回連続して表が出ることなので,

(1回目, 2回目, 3回目, 4回目) = (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1) の5通り。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 5 = \frac{5}{16}$$

問4

$X=2$ となる事象をA, $X_3=1$ である事象をBとする。

求める確率は, $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ である。

$$\text{問2より, } P(A) = \frac{5}{16}, \quad P(A \cap B) = \frac{2}{16}$$

$$\text{よって, } P_A(B) = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{5}{16}} = \frac{2}{5}$$

問5

$X=3$ となるのは, 3回連続して表が出ることなので,

(1回目, 2回目, 3回目, 4回目) = (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1) の2通り。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

$X=1$ となるのは,

(1回目, 2回目, 3回目, 4回目) = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1) の7通り。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 7 = \frac{7}{16}$$

$X=0$ となるのは, (1回目, 2回目, 3回目, 4回目) = (0, 0, 0, 0) の1通り。

$$\text{よって, } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

X	0	1	2	3	4	計
確率	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

求める期待値は,

$$0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{27}{16}$$

問1

$$a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{3}$$

問2

$$(1) \quad b_{n+1} = a_{2n+1} = \frac{1}{2}a_{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}a_{2n-1} = \frac{1}{3}a_{2n-1} = \frac{1}{3}b_n$$

$$\text{よって, } b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n$$

$$(2) \quad (1) \text{ と } b_1 = a_1 = 1 \text{ より, 数列 } \{b_n\} \text{ は, 初項 } 1, \text{ 公比 } \frac{1}{3} \text{ の等比数列をなす.}$$

$$\text{よって, } b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$(3) \quad (2) \text{ から, } a_{2n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ より,}$$

$$a_{2n} = \frac{2}{3}a_{2n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって, } \sum_{k=1}^n a_{2k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

問3

$$\sum_{k=1}^n k a_{2k-1} a_{2k} = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}$$

$$S = \sum_{k=1}^n k \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \text{ とおくと,}$$

$$S = 1 + 2\left(\frac{1}{9}\right) + 3\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{9}S = 1\left(\frac{1}{9}\right) + 2\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + n\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

辺々の差をとると,

$$\frac{8}{9}S = 1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} - n\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{9}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n \right\} - n\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

$$\therefore S = \frac{81}{64} - \frac{9}{64}(8n+9)\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

よって,

$$\sum_{k=1}^n k a_{2k-1} a_{2k} = \frac{27}{32} - \frac{3}{32}(8n+9)\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

問1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 6$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 6 + 4^2 = 13 \quad \therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$

問2

(1) 点 P は辺 BC 上にあるので, $\overrightarrow{OP} = t\vec{a} + \vec{b}$ ($0 \leq t \leq 1$) とおける。

$$OP \perp AB \text{ より, } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$(\vec{t}\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$6t - 16t + 9 - 6 = 0 \quad \therefore t = \frac{3}{10} \quad (0 \leq t \leq 1 \text{ を満たす})$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OP} = \frac{3}{10}\vec{a} + \vec{b}$$

(2) $\overrightarrow{OQ} = k\overrightarrow{OP}$ (k は実数) とおくと, $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{10}k\vec{a} + k\vec{b}$

点 Q は直線 AB 上にあるので,

$$\frac{3}{10}k + k = 1 \quad \therefore k = \frac{10}{13}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OQ} = \frac{3\vec{a} + 10\vec{b}}{13}$$

問3

(1) 問2(1) より, $BP : PC = 3 : 7$

$OP \parallel DC$ なので, $BQ : QD = 3 : 7$

問2(2) より, $BQ : QA = 3 : 10$

$$\therefore BD : DA = 10 : 3$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OD} = \frac{10\vec{a} + 3\vec{b}}{13}$$

<別解>

$$\overrightarrow{OD} = (1-l)\vec{a} + l\vec{b} \quad (l \text{ は実数}) \text{ とおくと,}$$

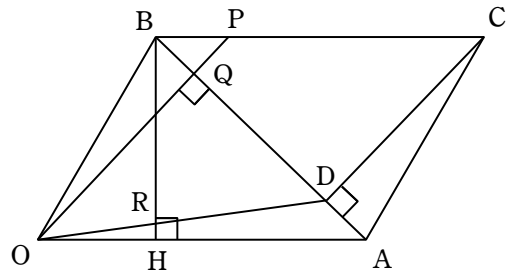
$$\overrightarrow{CD} = \{(1-l)\vec{a} + l\vec{b}\} - (\vec{a} + \vec{b}) = -l\vec{a} + (l-1)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \text{ より, } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = \{-l\vec{a} + (l-1)\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$-l\vec{a} \cdot \vec{b} + l|\vec{a}|^2 + (l-1)|\vec{b}|^2 - (l-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$-6l + 16l + 9(l-1) - 6(l-1) = 0 \quad \therefore l = \frac{3}{13}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OD} = \frac{10\vec{a} + 3\vec{b}}{13}$$



$$(2) \text{ OH} = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2} \text{ より, } \overrightarrow{\text{OH}} = \frac{\frac{3}{2}}{4} \vec{a} = \frac{3}{8} \vec{a}$$

R は BH 上にあるので,

$$\overrightarrow{\text{OR}} = m \overrightarrow{\text{OH}} + (1 - m) \overrightarrow{\text{OB}} \quad (m \text{ は実数}) \text{ とおける。}$$

$$\therefore \overrightarrow{\text{OR}} = \frac{3}{8} m \vec{a} + (1 - m) \vec{b} \quad \cdots \text{①}$$

また, $\overrightarrow{\text{OR}} = l \overrightarrow{\text{OD}}$ (l は実数) とおけるので, (1) の結果から

$$\overrightarrow{\text{OR}} = \frac{10}{13} l \vec{a} + \frac{3}{13} l \vec{b} \quad \cdots \text{②}$$

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b} \text{ より, ①, ② から } \begin{cases} \frac{3}{8} m = \frac{10}{13} l \\ 1 - m = \frac{3}{13} l \end{cases}$$

$$\text{連立して, } m = \frac{80}{89}, \quad l = \frac{39}{89}$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{\text{OR}} = \frac{30\vec{a} + 9\vec{b}}{89}$$

問1

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数})\end{aligned}$$

問2

(1) $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$ より $f'(x) = 0$ のとき, $0 \leq x \leq \pi$ より, $x = 0, \frac{\pi}{2}$ (2) $0 \leq x \leq \pi$ における $f(x)$ の増減表は次の通り。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

よって, $\begin{cases} \text{最大値 } \frac{\pi}{2} & (x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ \text{最小値 } -1 & (x = \pi \text{ のとき}) \end{cases}$

(3) $0 < a < 1$ より,

曲線 $y = a(x \sin x + \cos x) + 1$, x 軸, y 軸および
直線 $x = \pi$ で囲まれた部分は, 右図の斜線部分。

 $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $a(x \sin x + \cos x) + 1 \geq 0$ より

問1の結果を用いて, 面積は

$$\begin{aligned}& \int_0^{\pi} (ax \sin x + a \cos x + 1) dx \\ &= \int_0^{\pi} \{a(x \sin x + \cos x) + 1\} dx \\ &= \left[a(-x \cos x + 2 \sin x) + x \right]_0^{\pi} \\ &= a\pi + \pi\end{aligned}$$

面積は $\frac{3}{2}\pi$ より, $a\pi + \pi = \frac{3}{2}\pi$ よって, $a = \frac{1}{2}$ ($0 < a < 1$ を満たす)